Chapitre : Espaces vectoriels

1 Sous-espace vectoriel

Exercice 1 **Est-ce un sous-espace vectoriel ? –**

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, ou ne sont pas, des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ dans lequel ils sont inclus ?

1. $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x+y+3z = 0\}$;
2. $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x+y+3z = 2\}$;
3. $E_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 :\ x = y = 2z = 4t\}$;
4. $E_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ xy = 0\}$;
5. $E_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = x^2\}$;
6. $E_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 2x+3y-5z = 0\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x-y+z = 0\}$;
7. $E_7 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 2x+3y-5z = 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x-y+z = 0\}$.
8. $E_8 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (2x+3y-5z)^2 + (x-y+z)^2 = 0\}$.

Indication ▼ Correction ▼ [820]

Exercice 2 **Est-ce un sous-espace vectoriel (matrices) ? –**

Déterminer si les parties suivantes sont des sous-espaces vectoriels de $M_2(\mathbb{R})$:

1. $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : \ ad - bc = 1 \right\}$;
2. $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : \ x_1 + x_2 = x_4 \right\}$;
3. $E_3 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \ {}^tA = A\}$.

Indication ▼ Correction ▼ [2943]

Exercice 3 **Est-ce un sous-espace vectoriel (bis) ? –**

Déterminer si les ensembles suivants sont ou ne sont pas des sous-espaces vectoriels :

1. $E_1 = \{P \in \mathbb{R}[X];\ P(0) = P(2)\}$;
2. $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X];\ P'(0) = 2\}$;
3. Pour $A \in \mathbb{R}[X]$ non-nul fixé, $E_3 = \{P \in \mathbb{R}[X]; A|P\}$;
4. $\mathscr{D}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont dérivables ;
5. E_4, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$, où $a \in \mathscr{D}$.
6. E_5, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = x$, où $a \in \mathscr{D}$.

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 4 **Est-ce un sous-espace vectoriel ? –**

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Dire dans les cas suivants si la partie V de E est un sous-espace vectoriel de E.

1. V est l'ensemble des fonctions bornées.
2. V est l'ensemble des fonctions majorées.
3. V est l'ensemble des fonctions paires.
4. V est l'ensemble des fonctions paires ou impaires.

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 5 **Réunion de deux sous-espaces vectoriels** –

Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est encore un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Indication ▼ Correction ▼

2 Combinaisons linéaires

Exercice 6 **Combinaisons linéaires ? –**

Les vecteurs u suivants sont-ils combinaison linéaire des vecteurs u_i ?

1. $E=\mathbb{R}^2$, $u=(1,2)$, $u_1=(1,-2)$, $u_2=(2,3)$;
2. $E=\mathbb{R}^2$, $u=(1,2)$, $u_1=(1,-2)$, $u_2=(2,3)$, $u_3=(-4,5)$;
3. $E=\mathbb{R}^3$, $u=(2,5,3)$, $u_1=(1,3,2)$, $u_2=(1,-1,4)$;
4. $E=\mathbb{R}^3$, $u=(3,1,m)$, $u_1=(1,3,2)$, $u_2=(1,-1,4)$ (discuter suivant la valeur de m).

Indication ▼ Correction ▼ [810]

Exercice 7 ★★ **Les bagues** –

Émile achète pour sa maman une bague contenant 2g d'or, 5g de cuivre et 4g d'argent. Il la paie 6200 euros. Paulin achète pour sa maman une bague contenant 3g d'or, 5g de cuivre et 1g d'argent. Il la paie 5300 euros. Frédéric achète pour sa chérie une bague contenant 5g d'or, 12g de cuivre et 9g d'argent. Combien va-t-il la payer ?

Indication ▼ Correction ▼ [811]

Exercice 8 **Combinaisons linéaires ? –**

1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P(X) = 16X^3 - 7X^2 + 21X - 4$ est-il combinaison linéaire de $P_1(X) = 8X^3 - 5X^2 + 1$ et $P_2(X) = X^2 + 7X - 2$?

2. Dans l'espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \sin(2x)$ est-elle combinaison linéaire des fonctions sin et cos ?

Indication ▼ Correction ▼ [2621]

Exercice 9 **Dans un espace de fonctions** –

Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est-ce que la fonction arctan est combinaison linéaire de e^{x^2}, e^{-x} et sin ?

Indication ▼ Correction ▼ [2939]

3 Familles libres

Exercice 10 **Pour bien commencer... –**

Les familles suivantes sont-elles libres dans $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^4$ pour la dernière famille) ?

1. (u,v) avec $u=(1,2,3)$ et $v=(-1,4,6)$;
2. (u,v,w) avec $u=(1,2,-1)$, $v=(1,0,1)$ et $w=(0,0,1)$;
3. (u,v,w) avec $u=(1,2,-1)$, $v=(1,0,1)$ et $w=(-1,2,-3)$;
4. (u,v,w,z) avec $u=(1,2,3,4)$, $v=(5,6,7,8)$, $w=(9,10,11,12)$ et $z=(13,14,15,16)$.

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 11 **Deux par deux –**

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (4,1,4)$ et $v_3 = (2,-1,4)$.

1. Montrer que la famille (v_1, v_2) est libre. Faire de même pour (v_1, v_3), puis pour (v_2, v_3).
2. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?

Indication ▼ Correction ▼ [813]

Exercice 12 **Familles de fonctions –**

Démontrer que les familles suivantes sont libres dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

1. $(x \mapsto e^{ax})_{a\in\mathbb{R}}$;
2. $(x \mapsto |x-a|)_{a\in\mathbb{R}}$;
3. $(x \mapsto \cos(ax))_{a>0}$;
4. $(x \mapsto (\sin x)^n)_{n\geq 1}$.

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 13 **A partir d'une famille libre –**

Dans $\mathbb{R}^n$, on considère une famille de 4 vecteurs libres (e_1, e_2, e_3, e_4). Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(e_1, 2e_2, e_3)$;
2. (e_1, e_3) ;
3. $(e_1, 2e_1 + e_4, e_3 + e_4)$;
4. $(2e_1 + e_2, e_1 - 2e_2, e_4, 7e_1 - 4e_2)$.

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 14 ★★★ **Opération –**

Soit E un espace vectoriel et $u_1,\dots,u_n \in E$. Pour $k=1,\dots,n$, on pose $v_k = u_1+\cdots+u_k$. Démontrer que la famille $(u_1,\dots,u_n)$ est libre si et seulement si la famille $(v_1,\dots,v_n)$ est libre.

Indication ▼ Correction ▼ [3100]

4 Sous-espace vectoriel engendré

Exercice 15 **D'un système générateur à un système d'équations... –**

Donner un système d'équations des espaces vectoriels engendrés par les vecteurs suivants :

1. $u_1 = (1,2,3)$;
2. $u_1 = (1,2,3)$ et $u_2 = (-1,0,1)$;
3. $u_1 = (1,2,0)$, $u_2 = (2,1,0)$ et $u_3 = (1,0,1)$.

Indication ▼ Correction ▼ [826]

Exercice 16 **D'un système d'équations à un système générateur... –**

Trouver un système générateur des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:

1. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x+2y-z=0\}$;
2. $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x-y+z=0 \text{ et } 2x-y-z=0\}$.

Indication ▼ Correction ▼ [827]

Exercice 17 **Forme la plus adaptée –**

1. Soit $F_1 = \text{vect}(u_1, u_2)$ où $u_1 = (1,2,3)$ et $u_2 = (-1,0,1)$. Déterminer a, b, c dans $\mathbb{R}$ tels que

$$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ ax + by + cz = 0\}.$$

2. Soit $F_2 = \text{vect}(v_1)$ où $v_1 = (7,4,1)$. Déterminer a, b, c, a', b', c' dans $\mathbb{R}$ tels que

$$F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ ax + by + cz = 0 \text{ et } a'x + b'x + c'z = 0\}.$$

3. Soit $F_3 = \text{vect}(v_2)$ où $v_2 = (1,0,1)$. Déterminer a, b, c, a', b', c' dans $\mathbb{R}$ tels que

$$F_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ ax + by + cz = 0 \text{ et } a'x + b'x + c'z = 0\}.$$

4. En utilisant la description la plus adaptée de chacun des sous-espaces vectoriels, répondre aux questions suivantes :

A-t-on $F_2 \subset F_1$? A-t-on $F_3 \subset F_1$? A-t-on $F_1 \cap F_2 = \{0\}$? A-t-on $F_1 \cap F_3 = \{0\}$? Trouver une famille génératrice de $F_1 + F_2$. Trouver une famille génératrice de $F_1 + F_3$.

5. A-t-on $F_2 \subset F_1$? A-t-on $F_3 \subset F_1$?

6. A-t-on $F_1 \cap F_2 = \{0\}$? A-t-on $F_1 \cap F_3 = \{0\}$?

7. Trouver une famille génératrice de $F_1 + F_2$. Trouver une famille génératrice de $F_1 + F_3$.

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 18 **Coïncidence de sous-espaces –**

Dans les exemples suivants, démontrer que les sous-espaces F et G de E sont égaux.

1. $E=\mathbb{R}^3$, $u_1=(1,1,3)$, $u_2=(1,-1,-1)$, $v_1=(1,0,1)$, $v_2=(2,-1,0)$, $F=\text{vect}(u_1,u_2)$ et $G=\text{vect}(v_1,v_2)$.
2. $E=\mathbb{R}^3$, $F=\text{vect}\big((2,3,-1),(1,-1,-2)\big)$ et $G=\text{vect}\big((3,7,0),(5,0,-7)\big)$.
3. $E=\mathbb{R}^3$, $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x+y+z=0\}$, $u_1=(1,1,-2)$, $u_2=(1,-4,3)$ et $G=\text{vect}(u_1,u_2)$.
4. $E=\mathbb{R}^4$,

$$F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4;\ x+y+z+t=0 \text{ et } x-y+2z-2t=0\}$$

$$G=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4;\ 5x+y+7z-t=0 \text{ et } x-3y+3z-5t=0\}.$$

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 19 **Autour des sous-espaces engendrés –**

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$u_1 = (0,1,-2,1), \quad u_2 = (1,0,2,-1), \quad u_3 = (3,2,2,-1), \quad u_4 = (0,0,1,0).$$

Dire, en justifiant, si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. $\text{vect}(u_1,u_2,u_3) = \text{vect}\big((1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\big)$;
2. $(1,1,0,0) \in \text{vect}(u_1,u_2) \cap \text{vect}(u_2,u_3,u_4)$;
3. $\text{vect}(u_1,u_2) + \text{vect}(u_2,u_3,u_4) = \mathbb{R}^4$.

Indication ▼ Correction ▼ [2949]

5 Sommes directes et sous-espaces supplémentaires

Exercice 20 **En somme directe ? –**

Pour chacun des sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$ suivants, déterminer s'ils sont en somme directe.

1. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+z=0\}$ et $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{ \begin{array}{l} 2x+y+3z=0 \\ x-2y-z=0 \end{array} \right.\right\}$;
2. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+2z=0\}$ et $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{ \begin{array}{l} 2x+y+3z=0 \\ x-2y-z=0 \end{array} \right.\right\}$.

Indication ▼ Correction ▼ [2940]

Exercice 21 **Un exemple d'espaces supplémentaires –**

Dans $E=\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels $F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 :\ x+y+z+t=0\right\}$ et $G=\{(2a,-a,0,a),\ \text{avec } a\in\mathbb{R}\}$.

1. Démontrer que F et G sont en somme directe.
2. Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. Déterminer $a\in\mathbb{R}$ tel que le vecteur $(x-2a,y+a,z,t-a)\in F$.
3. En déduire que F et G sont supplémentaires.

Indication ▼ Correction ▼ [2941]

Exercice 22 **Où sont les supplémentaires ? –**

On considère dans $\mathbb{R}^4$ les cinq vecteurs suivants : $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$ et $v_5 = (0,1,0,1)$. Dire si les sous-espaces vectoriels suivants sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

1. $\text{vect}(v_1, v_2)$ et $\text{vect}(v_3)$?
2. $\text{vect}(v_1, v_2)$ et $\text{vect}(v_4, v_5)$?
3. $\text{vect}(v_1, v_3, v_4)$ et $\text{vect}(v_2, v_5)$?
4. $\text{vect}(v_1, v_4)$ et $\text{vect}(v_3, v_5)$?

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 23 **Périodiques et tend vers 0 à l'infini** –

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, F le sous-espace vectoriel des fonctions périodiques de période 1 et G le sous-espace vectoriel des fonctions f telles que $\lim_{+\infty} f = 0$. Démontrer que $F \cap G = \{0\}$. Est-ce que F et G sont supplémentaires ?

Indication ▼ Correction ▼ [832]

Exercice 24 ★★★ **Avec des suites –**

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles,

$$F = \{u \in E;\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = 0\}$$

$$G = \{u \in E;\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = u_{2n+1}\}.$$

Démontrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Indication ▼ Correction ▼ [833]

Exercice 25 **Trouver un supplémentaire !** –

Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant et $F = \{P \in \mathbb{R}[X];\ A \text{ divise } P\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et trouver un supplémentaire à F.

Indication ▼ Correction ▼ [829]

Exercice 26 **Transformer une somme en somme directe** –

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $F+G=E$. Soit F' un supplémentaire de $F\cap G$ dans F. Montrer que $F'\oplus G=E$.

Indication ▼ Correction ▼ [831]

Exercice 27 ★★★★ **Fonctions paires / Fonctions impaires –**

Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note F le sous-espace vectoriel des fonctions paires (ie $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et G le sous-espace vectoriel des fonctions impaires (ie $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Montrer que F et G sont supplémentaires.

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 28 **Un supplémentaire n'est jamais unique** –

Soit E un espace vectoriel dans lequel tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire. Soit F un sous-espace vectoriel propre de E (c'est-à-dire que $F \neq \{0\}$ et que $F \neq E$). Démontrer que F admet au moins deux supplémentaires distincts.

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 29 ★★★★★ **Fonctions qui s'annulent en un (plusieurs) point(s) –**

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On désigne par F le sous-espace des fonctions constantes et par G_a le sous-espace des fonctions qui s'annulent en a. Montrer que F et G_a sont supplémentaires dans E.

2. Plus généralement, soient $a_0, \dots, a_N$ des éléments distincts deux à deux de $\mathbb{R}$ et $G = \{f \in E;\ f(a_0) = \cdots = f(a_N) = 0\}$. Trouver un supplémentaire à G.

Indication ▼ Correction ▼ [830]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Essayer de montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels en utilisant la caractérisation. Si vous ne parvenez pas à prouver que ce sont des sous-espaces vectoriels, essayez de trouver un contre-exemple à une des propriétés requises.

Indication pour l'exercice 2 ▲

Indication pour l'exercice 3 ▲

Essayer de montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels en utilisant la caractérisation. Si vous ne parvenez pas à prouver que ce sont des sous-espaces vectoriels, essayez de trouver un contre-exemple à une des propriétés requises.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Essayer de montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels en utilisant la caractérisation. Si vous ne parvenez pas à prouver que ce sont des sous-espaces vectoriels, essayez de trouver un contre-exemple à une des propriétés requises.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Raisonner par l'absurde, prendre x dans $F\backslash G$ et y dans $G\backslash F$ et considérer $x+y$.

Indication pour l'exercice 6 ▲

Il s'agit de résoudre $u = xu_1 + yu_2$ et d'étudier si le système possède des solutions.

Indication pour l'exercice 7 ▲

Le vecteur $(5,12,9)$. est combinaison linéaire de $(2,5,4)$, $(3,5,1)$.

Indication pour l'exercice 8 ▲

1. Supposer que c'est le cas, écrire $P = aP_1 + bP_2$ et trouver des conditions que doivent vérifier a et b.
2. Idem...

Indication pour l'exercice 9 ▲

Procéder par l'absurde et étudier les limites en $+\infty$ et $-\infty$.

Indication pour l'exercice 10 ▲

Écrire une combinaison linéaire nulle, et résoudre le système pour voir si tous les coefficients de la combinaison linéaire sont nuls.

Indication pour l'exercice 11 ▲

Pour la première question, les vecteurs sont non-nuls et non colinéaires. Pour la seconde, trouver une relation de liaison entre les trois vecteurs, au besoin en résolvant un système.

Indication pour l'exercice 12 ▲

Prendre une sous-famille finie, écrire une relation de liaison, et trouver que tous les coefficients sont nuls. On pourra

1. Factoriser par le terme dominant ;
2. Utiliser des propriétés de dérivabilité des fonctions ;
3. Par récurrence...

4. Utiliser la limite de $(\sin x)^k/x$ en 0.

Indication pour l'exercice 13 ▲

Écrire pour chaque cas une relation de liaison, développer et se ramener à une écriture sous la forme $ae_1+be_2+ce_3+de_4=0$. Utiliser alors le fait que (e_1,e_2,e_3,e_4) est une famille libre.

Indication pour l'exercice 14 ▲

Pour le sens direct, considérer $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$ et trouver une combinaison linéaire des u_i égale au vecteur nul. Pour le sens réciproque, commencer par exprimer u_k en fonction de v_k et suivre le même raisonnement.

Indication pour l'exercice 15 ▲

Par exemple pour 2., dire que (x,y,z) est dans l'espace vectoriel engendré si et seulement si il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que ... On obtient un système de 3 équations qu'on essaie de résoudre en a et b. On obtient alors une équation de compatibilité qui est l'équation du sev engendré.

Indication pour l'exercice 16 ▲

Ecrire $(x,y,z)\in F \iff$ .... et essayer de résoudre le système en écrivant une coordonnée en fonction des autres...

Indication pour l'exercice 17 ▲

Indication pour l'exercice 18 ▲

Indication pour l'exercice 19 ▲

1. Commencer par remarquer que u_3 est combinaison linéaire de u_1 et de u_2, puis exprimer w_1 et w_2 en fonction de u_1 et u_2, et réciproquement.
2. Démontrer que $(1,1,0,0)$ est combinaison linéaire de (u_2,u_3,u_4).
3. Simplifier l'écriture de la somme, puis démontrer que $(1,0,0,0)$ n'est pas dans la somme.

Indication pour l'exercice 20 ▲

On considère $(x,y,z)\in F\cap G$. Il faut voir si $(x,y,z)=(0,0,0)$. Pour cela, on résout le système de 3 équations à 3 inconnues que vérifie (x,y,z).

Indication pour l'exercice 21 ▲

1.
2.
3. Écrire $(x,y,z,t)=(x-2a,y+a,z,t-a)+(2a,a,0,-a)$ pour un a bien choisi.

Indication pour l'exercice 22 ▲

1. Non.
2. Oui.
3. Non.
4. Non.

Indication pour l'exercice 23 ▲

D'une part, fixer $x \in \mathbb{R}$ et étudier $f(x+n)$. D'autre part, que dire d'une fonction qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Indication pour l'exercice 24 ▲

Indication pour l'exercice 25 ▲

Utiliser la division euclidienne.

Indication pour l'exercice 26 ▲

Indication pour l'exercice 27 ▲

Pour montrer que toute fonction h se décompose en $h = f+g$ avec f paire et g impaire, on pourra supposer dans un premier temps que c'est effectivement le cas. Alors, trouver à quoi doivent être égales $f(x)$ et $g(x)$ en calculant $h(x)$ et $h(-x)$. Puis, poser f et g les fonctions définies par ces formules, et vérifier que tout fonctionne.

Indication pour l'exercice 28 ▲

Considérer un supplémentaire G de F dans E, choisir x dans E qui n'est ni dans F, ni dans G, puis construire un supplémentaire de F contenant x.

Indication pour l'exercice 29 ▲

1. Supposons que $h = g+C$, avec $g \in G_a$. Que doit valoir C ? et donc g ?

2. Un supplémentaire qui convient est $\mathbb{R}_N[X]$. On pourra considérer l'(unique) polynôme P de cet ensemble tel que $P(a_i) = h(a_i)$ pour tout $i \in \{0,\dots,N\}$.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soient $X=(x,y,z)$ et $X'=(x',y',z')$ éléments de E_1. Alors, $X+X'=(x+x',y+y',z+z')$ est aussi élément de E_1. En effet,

$$(x+x')+(y+y')+3(z+z')=(x+y+3z)+(x'+y'+3z')=0.$$

De même, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on a $\lambda X=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$ est élément de E_1 puisque

$$\lambda x+\lambda y+3\lambda z=\lambda(x+y+3z)=0.$$

E_1 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car $\vec{0}=(0,0,0)$ n'est pas élément de E_2.

3. Soient $X=(x,y,z,t)$ et $X'=(x',y',z',t')$ deux éléments de E_3. Alors $X+X'=(x+x',y+y',z+z',t+t')$ est aussi élément de E_3. En effet,

$$x+x'=y+y'=2z+2z'=2(z+z')=4t+4t'=4(t+t').$$

De même, on prouve que pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, λX est élément de E_3. E_3 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

4. E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car il n'est pas stable par addition. En effet, $X=(1,0)$ et $Y=(0,1)$ sont tout les deux éléments de E_4, mais $X+Y=(1,1)$ n'est pas élément de E_4.

5. Les éléments $(1,1)$ et $(-1,1)$ sont éléments de E_5. Si on effectue leur somme, on trouve $(0,2)$ qui n'est pas élément de E_5 : E_5 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Plus généralement, un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ est une droite passant par $(0,0)$, ou $\mathbb{R}^2$ lui-même, ou encore le singleton $\{(0,0)\}$. E_5 est une parabole et n'est donc pas un sous-espace vectoriel.

6. Posons $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ 2x+3y-5z=0\}$ et $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x-y+z=0\}$. Comme à la première question, on montre que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Leur intersection $F\cap G$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

7. Cette fois, aucun théorème du cours ne dit qu'une réunion de deux sous-espaces vectoriels reste un sous-espace vectoriel. Ici, prenons $(5,0,2)\in F\subset F\cup G$ et $(1,1,0)\in G\subset F\cup G$. Alors $(5,0,2)+(1,1,0)=(6,1,2)$ n'est pas élément de F car $12+3-10=5\neq 0$, et il n'est pas non plus élément de G car $6-1+2=7\neq 0$. Ainsi, $F\cup G$ n'est pas stable par addition et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Plus généralement, on prouve qu'une réunion de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel si et seulement si l'un des deux est inclus dans l'autre.

8. On remarque que si a et b sont deux réels, alors on a $a^2+b^2=0$ si et seulement si $a=b=0$. Ainsi, on a $(x,y,z)\in E_8$ si et seulement $2x+3y-5z=0$ et $x-y+z=0$, si et seulement si $(x,y,z)\in E_6$. Ainsi, E_8 est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Non, ce n'est pas le cas car la matrice nulle n'est pas dans E_1.

2. Oui ! En effet, prenons $A=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$ et $A'=\begin{pmatrix}x_1' & x_2'\\ x_3' & x_4'\end{pmatrix}$ dans E_2. Alors $A+A'=\begin{pmatrix}x_1+x_1' & x_2+x_2'\\ x_3+x_3' & x_4+x_4'\end{pmatrix}$ et on a

$$(x_1+x_1')+(x_2+x_2')=(x_1+x_2)+(x_1'+x_2')=x_4+x_4'$$

ce qui prouve que $A+A'\in E_2$. De même, on prouve que pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on a $\lambda A\in E_2$.

3. Oui ! Ceci vient des propriétés de la transposée, en particulier du fait que

$${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$$

et

$${}^t(\lambda A)=\lambda\,{}^tA.$$

Correction de l'exercice 3 ▲

1. On va prouver que E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Remarquons d'abord que le polynôme nul est un élément de E_1. Ensuite, prenons P et Q deux éléments de E_1, et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors $(P+Q)(0)=P(0)+Q(0)=$

$P(2)+Q(2)=(P+Q)(2)$ et donc $P+Q\in E_1$. De même, $(\lambda P)(0)=\lambda\times P(0)=\lambda\times P(2)=(\lambda P)(2)$ et donc $\lambda P\in E_1$. Ceci prouve le résultat annoncé.

2. E_2 n'est pas un espace vectoriel car le polynôme nul n'est pas élément de E_2. Donc E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel.

3. Remarquons que $E_3=\{AQ;\ Q\in\mathbb{R}[X]\}$. Soient $P_1=AQ_1$ et $P_2=AQ_2$ deux éléments de E_3, et soit également $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors $P_1+P_2=A(Q_1+Q_2)\in E_3$ et $\lambda P_1=A(\lambda Q_1)\in E_3$, ce qui prouve que E_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

4. On sait que la somme de deux fonctions dérivables est une fonction dérivable, et que le produit d'une fonction dérivable par un scalaire est une fonction dérivable. Par conséquent, $\mathscr{D}$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

5. Remarquons d'abord que E_4 est une partie de $\mathscr{D}$. Soient y_1,y_2 deux solutions et $\lambda\in\mathbb{R}$. Posons $y=y_1+\lambda y_2$. Alors

$$y'+a(x)y=(y_1'+a(x)y_1)+\lambda(y_2'+a(x)y_2)=0$$

ce qui prouve que $y\in E_4$. Ainsi, E_4 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{D}$.

6. E_5 n'est pas un espace vectoriel car 0 n'est pas solution de l'équation différentielle.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Soit $f,g\in E$, et soit M_1,M_2 un majorant respectif de $|f|,|g|$. Alors, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, et tout $x\in\mathbb{R}$,

$$|f(x)+g(x)|\leq|f(x)|+|g(x)|\leq M_1+M_2,\ |\lambda f(x)|\leq|\lambda|\times M_1.$$

Ainsi, $f+g$ et λf sont elles aussi bornées, et V est un sous-espace vectoriel de E.

2. Considérons la fonction f définie pour $x\in\mathbb{R}$ par $f(x)=-|x|$. Alors f est majorée (par 0). Mais on a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $-f(x)=|x|$. Ainsi, la fonction $-f$ n'est pas majorée. Donc $f\in V$ et $-f\notin V$: V n'est pas un espace vectoriel de E.

3. Prenons f et g deux fonctions paires et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}(f+g)(-x)&=f(-x)+g(-x)\\&=f(x)+g(x)=(f+g)(x),\end{aligned}$$

$$(\lambda f)(-x)=\lambda f(-x)=\lambda f(x)=(\lambda f)(x).$$

Ainsi, $f+g$ et λf sont paires et V est un sous-espace vectoriel de E.

4. Prenons $f(x)=x^2$ et $g(x)=x$. Alors f est paire et g est impaire. Mais $(f+g)(1)=2$ et $(f+g)(-1)=0$. Ainsi, $f+g$ n'est ni paire, ni impaire et V n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Correction de l'exercice 5 ▲

Bien sûr, si $F\subset G$, $F\cup G=G$ est un sous-espace vectoriel ce qui prouve une implication. Réciproquement, supposons que $F\cup G$ est un sous-espace vectoriel de E et que pourtant F n'est pas inclus dans G et G n'est pas inclus dans F. Prenons x dans $F\backslash G$ et y dans $G\backslash F$. Alors, puisque $F\cup G$ est un sous-espace vectoriel, il est stable par addition et donc $x+y\in F\cup G$. Mais, si $x+y$ est dans F, alors $y=(x+y)-x\in F$ (car F est un sev) ce qui n'est pas le cas. De même, si $x+y$ est dans G, alors $x=(x+y)-y\in G$ ce qui est impossible. On obtient donc une contradiction et l'autre implication.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. On se demande s'il existe $x,y\in\mathbb{R}$ tel que $u=xu_1+yu_2$. On doit résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcl}1&=&x+2y\\2&=&-2x+3y\end{array}\right.$$

Effectuant $L_2+2L_1\to L_2$, on trouve qu'il est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl}1&=&x+2y\\4&=&7y\end{array}\right.$$

On peut donc trouver y, puis x : u est bien combinaison linéaire de u_1 et u_2. Une façon plus abstraite de voir les choses est de remarquer que u_2 n'est pas proportionnel à u_1. Ainsi, (u_1,u_2) est une famille libre à deux éléments dans $\mathbb{R}^2$, espace de dimension 2. C'est donc une base de E. En particulier, tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ s'écrit comme combinaison linéaire de u_1 et u_2.

2. D'après la question précédente, u est combinaison linéaire de u_1 et u_2. Il est a fortiori combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3.

3. On ne peut plus avoir de raisonnement abstrait car on travaille avec seulement deux vecteurs dans un espace de dimension 3. L'équation $u = xu_1 + yu_2$ équivaut successivement à

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 2\\ 3x-y &=& 5\\ 2x+4y &=& 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} x+y &=& 2 & \\ 4x &=& 7 & (L_2+L_1\to L_2)\\ -2x &=& -5 & (L_3-4L_1\to L_3) \end{array}\right.$$

Les deux dernières équations sont incompatibles, u n'est donc pas combinaison linéaire de u_1 et u_2.

4. On reprend le même raisonnement. L'équation $u = xu_1 + yu_2$ équivaut successivement à

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 3\\ 3x-y &=& 1\\ 2x+4y &=& m \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} x+y &=& 3 & \\ 4x &=& 4 & (L_2+L_1\to L_2)\\ -2x &=& m-12 & (L_3-4L_1\to L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1\\ y &=& 2\\ -2 &=& m-12 \end{array}\right.$$

Le système admet donc une solution si et seulement si $m = 10$. Par conséquent, u est combinaison linéaire de u_1 et u_2 si et seulement si $m = 10$.

Correction de l'exercice 7 ▲

Le vecteur $(5,12,9)$ est combinaison linéaire de $(2,5,4)$, $(3,5,1)$. Il s'écrit en effet

$$(5,12,9) = \frac{11}{5}(2,5,4) + \frac{1}{5}(3,5,1).$$

Autrement dit, la dernière bague peut être réalisée avec 11/5 de la première bague et 1/5 de la deuxième bague. Son coût est donc

$$\frac{11}{5}\times 6200 + \frac{1}{5}5300 = 14700 \text{ euros.}$$

Très joli cadeau !

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Supposons que ce soit le cas, et écrivons $P = aP_1 + bP_2$. Si on regarde les termes de degré 3, alors on voit qu'on a nécessairemement $a = 2$. Si on regarde ensuite les termes de degré 2, alors on voit qu'on a nécessairement $-7 = -10 + b$ et donc $b = 3$. Et alors, on vérifie qu'on a bien $P = 2P_1 + 3P_2$, et donc P est bien combinaison linéaire de P_1 et P_2.

2. Faisons d'abord attention ! La formule bien connue $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ ne dit pas que $x \mapsto \sin(2x)$ est combinaison linéaire de sin et cos, puisqu'un produit de ces deux fonctions intervient. On procède comme à la question précédente et on suppose qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(2x) = a\sin(x) + b\cos(x)$. Pour $x = 0$, on trouve $b = 0$. Pour $x = \pi/2$, on trouve $a = 0$. Et comme $x \mapsto \sin(2x)$ n'est pas la fonction nulle, on obtient une contradiction : la fonction $x \mapsto \sin(2x)$ n'est pas une combinaison linéaire des fonctions sin et cos.

Correction de l'exercice 9 ▲

Supposons que arctan soit combinaison linéaire de e^{x^2}, e^{-x} et sin. Alors il existe $a,b,c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan(x) = ae^{x^2} + be^{-x} + c\sin(x).$$

Puisque e^{-x} tend vers 0 en $+\infty$ et sin est bornée, si $a \neq 0$, alors $ae^{x^2} + be^{-x} + c\sin(x)$ tend vers $\pm\infty$ lorsque $x \to +\infty$ (suivant le signe de a). Ce n'est pas le cas de $\arctan(x)$, et donc $a = 0$. Prouvons maintenant que $b = 0$. Faisant $x = 0$ dans l'égalité, et puisqu'on sait déjà que $a = 0$, on trouve $b = 0$. On a donc prouvé que si arctan est combinaison linéaire de e^{x^2}, e^{-x} et $\sin(x)$, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\arctan(x) = c\sin(x)$. Ce n'est pas le cas, puisque par exemple la fonction arctan admet une limite en $+\infty$ et pas la fonction sin. En conclusion, arctan n'est pas combinaison linéaire de e^{x^2}, e^{-x} et sin.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Puisque u et v sont non-nuls et que u n'est pas proportionnel à v, la famille de deux vecteurs (u, v) est libre.

2. Soit a, b, c des réels tels que $au + bv + cw = 0$. On a

$$au + bc + cw = (a + b, 2a, -a + b + c)$$

et donc $au + bv + cw = 0$ si et seulement si

$$\begin{cases} a + b &= 0 \\ 2a &= 0 \\ -a + b + c &= 0 \end{cases}$$

On en déduit, par la deuxième ligne, $a = 0$, puis $b = 0$ et $c = 0$. La famille (u, v, w) est une famille libre.

3. Soit a, b, c des réels tels que $au + bv + cw = 0$. Ceci se traduit en le système

$$\begin{cases} a + b - c &= 0 \\ 2a + 2c &= 0 \\ -a + b - 3c &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b - c &= 0 \\ -2b + 4c &= 0 \quad L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ 2b - 4c &= 0 \quad L_3 + L_1 \to L_3 \end{cases}$$

Pour $c = 1$, $b = 2$ et $a = -1$, on obtient une solution non-nulle du système. Autrement dit, $-u + 2v + w = 0$ et donc la famille (u, v, w) est liée.

4. On peut reprendre la même méthode que précédemment, en écrivant $au + bv + cw + dz = 0$, et montrer qu'il existe une solution non nulle : (u, v, w, z) est une famille liée. On peut aussi remarquer plus facilement que $v = u + (4, 4, 4, 4)$ et que $w = v + (4, 4, 4, 4)$. Ainsi, $v - u = w - v$, soit $u - 2v + w = 0$, et la famille est liée.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Les vecteurs v_1 et v_2 ne sont pas nuls et ne sont pas colinéaires. Ainsi, la famille de *deux* vecteurs (v_1, v_2) est libre. Il en est de même pour la famille (v_1, v_3), ainsi que pour la famille (v_2, v_3), par une preuve identique.

2. On remarque que $v_3 = v_2 - 2v_1$: il y a une combinaison linéaire des trois vecteurs avec des coefficients non tous nuls qui donne le vecteur nul. La famille n'est pas libre. Si on n'a pas la "chance" de remarquer que $v_3 = v_2 - 2v_1$, on peut écrire une relation de liaison $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$, on obtient un système de trois équations dont les inconnues sont a, b et c. La résolution de ce système montre qu'il admet une solution non-nulle.

Correction de l'exercice 12 ▲

1. Soient $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$, où p est arbitraire. Il suffit de montrer que $(e^{a_1 x}, \ldots, e^{a_p x})$ est une famille libre. Considérons une relation de liaison $\lambda_1 e^{a_1 x} + \cdots + \lambda_p e^{a_p x}$. On factorise par le terme dominant, c'est-à-dire $e^{a_p x}$. On obtient

$$e^{a_p x}(\lambda_p + \lambda_{p-1} e^{(a_{p-1} - a_p)x} + \cdots + \lambda_1 e^{(a_1 - a_p)x}) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

On simplifie par $e^{a_p x}$, qui ne s'annule jamais, et on fait tendre x vers $+\infty$. Puisque $e^{(a_j - a_p)x}$ tend vers 0 pour $j < p$, le membre de gauche converge vers λ_p qui vaut donc 0. On répète le procédé en factorisant ensuite par $e^{a_{p-1} x}$ pour prouver que $\lambda_{p-1} = 0$, et on obtient successivement que $\lambda_p, \lambda_{p-1}, \ldots$ et finalement λ_1 sont nuls (on peut aussi effectuer une récurrence). La famille est donc effectivement libre. Avec le même type de raisonnement (mais c'est plus dur d'ordonner les couples), on pourra prouver que la famille $(x^a (\ln x)^b)_{a,b \in \mathbb{R}}$ est libre.

2. Soient $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$, où p est arbitraire. Il suffit de montrer que $(x \mapsto |x-a_1|, \ldots, x \mapsto |x-a_p|)$ est une famille libre. Considérons une relation de liaison, c'est-à-dire supposons que $\lambda_1|x-a_1| + \cdots + \lambda_p|x-a_p| = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit k dans $\{1,\ldots,p\}$ et réécrivons la relation sous la forme

$$\lambda_k|x-a_k| = -\sum_{j\neq k} \lambda_j|x-a_j| := g_k(x).$$

Alors, la fonction g_k est dérivable en a_k, car chaque fonction $x \mapsto |x-a_j|$, $j \neq k$ est dérivable en a_k (au voisinage de a_k, elle est égale à une fonction affine). Il en est donc de même de $x \mapsto \lambda_k|x-a_k|$. Ceci n'est possible que si $\lambda_k = 0$.

3. On va démontrer par récurrence sur N que toute famille $\big(\cos(a_1x), \ldots, \cos(a_Nx)\big)$ avec $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_N$ est libre. C'est le cas pour $N = 1$ ($\cos(ax)$ n'est jamais la fonction nulle). Supposons le résultat vrai au rang $N-1$, et prouvons-le au rang N en écrivant une relation de liaison :

$$\lambda_1\cos(a_1x) + \cdots + \lambda_N\cos(a_Nx) = 0.$$

On dérive deux fois et on trouve

$$a_1^2\lambda_1\cos(a_1x) + \cdots + a_N^2\lambda_N\cos(a_Nx) = 0.$$

En retranchant a_N^2 fois la première équation à la deuxième, on trouve

$$(a_1^2 - a_N^2)\lambda_1\cos(a_1x) + \cdots + (a_{N-1}^2 - a_N^2)\lambda_{N-1}\cos(a_{N-1}x) = 0.$$

Par hypothèse de récurrence, on a $(a_j^2 - a_N^2)\lambda_j = 0$ pour tout $j = 1,\ldots,N-1$, soit finalement $\lambda_j = 0$ puisque $a_j^2 \neq a_N^2$. De retour à l'équation initiale, on retrouve aussi $\lambda_N = 0$, ce qui prouve bien que la famille est libre.

4. Soit $N \geq 1$. Il suffit de prouver que la famille $(x \mapsto (\sin x)^n)_{1\leq n\leq N}$ est libre. Considérons des scalaires $\lambda_1,\ldots,\lambda_N$ tels que

$$\lambda_1\sin x + \cdots + \lambda_N(\sin x)^N = 0.$$

On rappelle que $\frac{\sin x}{x} \to 1$ si $x \to 0$, et par conséquent, si $k \geq 2$, on a $(\sin x)^k/x \to 0$ si $x \to 0$. Reprenons l'équation précédente et divisons par x pour $x \neq 0$. On a

$$\lambda_1\frac{\sin x}{x} + \lambda_2\frac{\sin^2 x}{x} + \cdots + \lambda_N\frac{(\sin x)^N}{x} = 0.$$

Faisons tendre x vers 0. Le membre de gauche tend vers λ_1, celui de droite vers 0 et on obtient donc

$$\lambda_1 = 0.$$

Il suffit ensuite d'itérer le raisonnement en divisant successivement par $x^2, x^3, \ldots$, ou bien de faire une récurrence en simplifiant par $\sin x$. Une autre méthode, peut-être plus simple, consiste à considérer le polynôme

$$P(X) = \lambda_1X + \cdots + \lambda_NX^n$$

et de remarquer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(\sin x) = 0$. Ainsi, P admet une infinite de racines, et donc P est le polynôme nul.

Correction de l'exercice 13 ▲

1. Soit une relation de liaison

$$ae_1 + b(2e_2) + ce_3 = 0 \implies ae_1 + (2b)e_2 + ce_3 + 0e_4 = 0.$$

Alors puisque la famille (e_1,e_2,e_3,e_4) est libre, on en déduit que $a = 2b = c = 0$, soit $a = b = c = 0$. La famille est donc libre.

2. C'est encore plus facile. Une famille extraite d'une famille libre est une famille libre !

3. Soit une relation de liaison

$$ae_1 + b(2e_1 + e_4) + c(e_3 + e_4) = 0 \implies (a+2b)e_1 + ce_3 + (b+c)e_4 = 0.$$

Puisque la famille (e_1,e_2,e_3,e_4) est libre, ceci entraine que

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+2b & = & 0 \\ c & = & 0 \\ b+c & = & 0 \end{array}\right.$$

d'où on tire assez facilement que $a=b=c=0$. La famille $(e_1,2e_1+e_4,e_3+e_4)$ est donc libre.

4. On peut remarquer que

$$7e_1-4e_2=2(2e_1+e_2)+3(e_1-2e_2)$$

et donc la famille n'est pas libre. On pouvait aussi prendre la même méthode que pour la question précédente, et obtenir cette fois que le système admet une solution non-triviale.

Correction de l'exercice 14 ▲

Commençons par supposer que $(u_1,\dots,u_n)$ est libre. Soit $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ des scalaires tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k = 0$. Alors, en remplaçant v_k par $u_1+\cdots+u_k$, puis en permutant les sommes, on trouve successivement

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \left(\sum_{j=1}^k u_j\right) = 0 \iff \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=j}^n \lambda_j\right) u_j = 0.$$

Puisque la famille $(u_1,\dots,u_n)$ est libre, on en déduit que, pour tout $j=1,\dots,n$, on a

$$\sum_{k=j}^n \lambda_j = 0.$$

Mais on trouve un système triangulaire en $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ dont la seule solution est $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$. La famille $(v_1,\dots,v_n)$ est bien une famille libre. Réciproquement, on suppose que $(v_1,\dots,v_n)$ est libre et on remarque que $u_1=v_1$, puis, pour $k=2,\dots,n$, $u_k=v_k-v_{k-1}$. Soit $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ des scalaires tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k = 0$. Alors on obtient

$$\lambda_1 v_1 + \sum_{k=2}^n \lambda_k (v_k - v_{k-1}) = 0 \iff \lambda_n v_n + \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) v_k = 0.$$

Puisque la famille $(v_1,\dots,v_n)$ est libre, on obtient $\lambda_n=0$ et $\lambda_k=\lambda_{k+1}$ pour $k=1,\dots,n-1$, ce qui donne $\lambda_{n-1}=\cdots=\lambda_1=0$. La famille $(u_1,\dots,u_n)$ est libre.

Correction de l'exercice 15 ▲

1. On note F le sous-espace vectoriel engendré par u_1. Alors

$$(x,y,z)\in F \iff \exists a\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & a \\ y & = & 2a \\ z & = & 3a \end{array}\right. \iff \exists a\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} a & = & x \\ y-2x & = & 0 \\ z-3x & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} y-2x & = & 0 \\ z-3x & = & 0 \end{array}\right.$$

On a bien trouvé un système d'équations de F.

2. On note G le sous-espace vectoriel engendré par u_1 et u_2. Alors,

$$(x,y,z)\in G \iff \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & a-b \\ y & = & 2a \\ z & = & 3a+b \end{array}\right.$$

$$\iff \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} a & = & y/2 \\ b & = & z-3y/2 \\ 0 & = & x-2y+z \end{array}\right.$$

$$\iff x-2y+z=0.$$

Cette dernière équation est une équation de G.

3. On note H le sous-espace engendré par u_1, u_2 et u_3. Alors,

$$(x,y,z)\in H \iff \exists (a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{cases} x &= a+2b+c\\ y &= 2a+b\\ z &= c\end{cases}$$

$$\iff \exists (a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{cases} a+2b+c &= x\\ -3b-2c &= y-2x\\ c &= z\end{cases}$$

On obtient un système triangulaire dont aucun des pivots n'est nul. Autrement dit, le système admet toujours une solution, quelles que soient les valeurs de x, y et z. Ainsi, $H=\mathbb{R}^3$.

Correction de l'exercice 16 ▲

1. On a

$$(x,y,z)\in F \iff x=-2y+z \iff \begin{cases} x &= y\times -2+z\times 1\\ y &= y\times 1+z\times 0\\ z &= y\times 0+z\times 1.\end{cases}$$

Posant $u_1=(-2,1,0)$ et $u_2=(1,0,1)$, on a donc $F=\text{vect}(u_1,u_2)$. Cette solution n'est (bien sûr !) pas unique.

2. On a

$$(x,y,z)\in G \iff \begin{cases} x-y+z &= 0\\ 2x-y-z &= 0\end{cases} \iff \begin{cases} x-y+z &= 0\\ y-3z &= 0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=2z\\ y=3z\\ z=z\end{cases}$$

On a donc $G=\text{vect}(u)$, avec $u=(2,3,1)$.

Correction de l'exercice 17 ▲

1. On a

$$(x,y,z)\in F_1 \iff \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x &= \lambda-\mu\\ y &= 2\lambda\\ z &= 3\lambda+\mu\end{cases}$$

$$\iff \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} \lambda &= y/2\\ \mu &= y/2-x\\ z &= 3\lambda+\mu\end{cases}$$

$$\iff \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} \lambda &= y/2\\ \mu &= y/2-x\\ 0 &= x-2y+z\end{cases}$$

$$\iff x-2y+z=0.$$

2. On écrit

$$(x,y,z)\in F_2 \iff \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \begin{cases} x &= 7\lambda\\ y &= 4\lambda\\ z &= \lambda\end{cases} \iff \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \begin{cases} \lambda &= z\\ x-7z &= 0\\ y-4z &= 0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-7z &= 0\\ y-4z &= 0\end{cases}.$$

On a bien trouvé un système d'équations de F_2.

3. On écrit

$$(x,y,z)\in F_3 \iff \exists \lambda\in\mathbb{R},\ \begin{cases} x &= \lambda \\ y &= 0 \\ z &= \lambda \end{cases} \iff \exists \lambda\in\mathbb{R},\ \begin{cases} \lambda &= z \\ x-z &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-z &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}.$$

On a bien trouvé un système d'équations de F_3.

4. F_2 est inclus dans F_1 si et seulement si $v_1\in F_1$, ce qu'on vérifie facilement en utilisant l'équation de F_1 : $7-2\times 4+1=0$. F_3 n'est pas inclus dans F_1 car $v_2\notin F_1$, puisque $1-2\times 0+1=2\neq 0$. On n'a pas $F_1\cap F_2=\{0\}$ puisque $v_1\in F_1\cap F_2$ et $v_1\neq 0$. On va prouver que $F_1\cap F_3=\{0\}$ en remarquant que

$$(x,y,z)\in F_1\cap F_3 \iff \begin{cases} x-2y+z &= 0 \\ x-z &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}$$

Puisque $F_2\subset F_1$, on a $F_1+F_2=F_1$ et donc (u_1,u_2) est une famille génératrice de F_1+F_2. On a aussi $F_1+F_3=\text{vect}(u_1,u_2,v_2)$ et donc (u_1,u_2,v_2) est une famille génératrice de F_1+F_3.

5. F_2 est inclus dans F_1 si et seulement si $v_1\in F_1$, ce qu'on vérifie facilement en utilisant l'équation de F_1 : $7-2\times 4+1=0$. F_3 n'est pas inclus dans F_1 car $v_2\notin F_1$, puisque $1-2\times 0+1=2\neq 0$.

6. On n'a pas $F_1\cap F_2=\{0\}$ puisque $v_1\in F_1\cap F_2$ et $v_1\neq 0$. On va prouver que $F_1\cap F_3=\{0\}$ en remarquant que

$$(x,y,z)\in F_1\cap F_3 \iff \begin{cases} x-2y+z &= 0 \\ x-z &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}$$

7. Puisque $F_2\subset F_1$, on a $F_1+F_2=F_1$ et donc (u_1,u_2) est une famille génératrice de F_1+F_2. On a aussi $F_1+F_3=\text{vect}(u_1,u_2,v_2)$ et donc (u_1,u_2,v_2) est une famille génératrice de F_1+F_3.

Correction de l'exercice 18 ▲

1. Première méthode : Pour montrer que $\text{vect}(u_1,u_2)\subset\text{vect}(v_1,v_2)$, il suffit de montrer que u_1 et u_2 sont tous deux combinaison linéaire de v_1 et v_2. L'équation $u_1=xv_1+yv_2$ est équivalente à

$$\begin{cases} 1 &= x+2y \\ 1 &= -y \\ 3 &= x \end{cases}$$

dont la solution est donnée par $x=3$ et $y=-1$. L'équation $u_2=xv_1+yv_2$ est équivalente à

$$\begin{cases} 1 &= x+2y \\ -1 &= -y \\ -1 &= x \end{cases}$$

dont la solution est donnée par $x=-1$ et $y=1$. Donc, $\text{vect}(u_1,u_2)\subset\text{vect}(v_1,v_2)$. Réciproquement, pour prouver que $\text{vect}(v_1,v_2)\subset\text{vect}(u_1,u_2)$, il suffit de prouver que v_1 et v_2 sont combinaison linéaire de u_1 et u_2. L'équation $v_1=xu_1+yu_2$ est équivalente à

$$\begin{cases} 1 &= x+y \\ 0 &= x-y \\ 1 &= 3x-y. \end{cases}$$

On résout ce système en faisant L_1+L_2 qui donne $x=1/2$, on obtient ensuite $y=1/2$ et on vérifie que cela fonctionne dans la dernière équation. De même, on peut prouver que v_2 est combinaison linéaire de u_1 et u_2. Deuxième méthode : On peut rechercher une équation de $F=\text{vect}(u_1,u_2)$ et de $G=\text{vect}(v_1,v_2)$. On a :

$$(x,y,z)\in F \iff \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases} x &= a+b \\ y &= a-b \\ z &= 3a-b \end{cases}$$

$$\iff \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases} a+b &= x \\ 2b &= x-y \quad (L_1-L_2\to L_2) \\ 4b &= 3x-z \quad (3L_1-L_3\to L_3) \end{cases}$$

$$\iff \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases} a+b &= x \\ 2b &= x-y \quad (L_1-L_2\to L_2) \\ 0 &= x+2y-z \quad (L_3-2L_2\to L_3) \end{cases}$$

Ce dernier système admet une solution si et seulement si $x+2y-z=0$. On a donc $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x+2y-z=0\}$. De même,

$$(x,y,z)\in G \iff \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases} x &= a+2b \\ y &= -b \\ z &= a \end{cases}$$

$$\iff \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases} x+2y-z &= 0 \\ y &= -b \\ z &= a \end{cases}$$

Ce dernier système admet donc une solution si et seulement si $x+2y-z=0$. On a donc $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x+2y-z=0\}$. Il est alors clair que $F=G$. Troisième méthode : On peut s'arrêter à l'inclusion $\text{vect}(u_1,u_2)\subset \text{vect}(v_1,v_2)$ dans chacune des démonstrations précédentes si on connait la théorie de la dimension. En effet, puisque u_2 et u_1 ne sont pas colinéaires, $\text{vect}(u_1,u_2)$ est de dimension 2. De même, $\text{vect}(v_1,v_2)$ est de dimension 2. Puisque l'un est inclus dans l'autre et qu'ils ont même dimension, ils sont égaux.

2. On peut reprendre l'une des trois méthodes de l'exercice précédent. Par exemple, on va montrer que $G\subset F$. Pour cela, on va écrire un système d'équations de F, et on va vérifier que les deux vecteurs qui engendrent G satisfont ce système d'équations. On en déduit alors que tout vecteur de G satisfait aussi l'équation, et donc que G est inclus dans F. On écrit alors que

$$\begin{aligned} (x,y,z)\in F &\iff \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases} x &= 2a+b \\ y &= 3a-b \\ z &= -a-2b \end{cases} \\ &\iff \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases} b &= x-2a \\ 5a &= x+y \\ z &= -a-2b \end{cases} \\ &\iff \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases} b &= \frac{3x-2y}{5} \\ a &= \frac{x+y}{5} \\ z &= \frac{-7x+3y}{5} \end{cases} \\ &\iff 7x-3y+5z=0. \end{aligned}$$

On a donc $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ 7x-3y+5z=0\}$. Or, $(3,7,0)$ et $(5,0,-7)$ satisfont cette équation et donc, d'après la discussion précédente, $G\subset F$. Avec la même méthode, ou en utilisant la théorie de la dimension, on en déduit que $G=F$.

3. On va chercher une équation de G. On a

$$\begin{aligned}
(x,y,z)\in G &\iff \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x &= a+b \\ y &= a-4b \\ z &= -2a+3b \end{cases} \\
&\iff \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x &= a+b \\ y-x &= -5b \\ z &= -2a+3b \end{cases} \\
&\iff \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} \frac{4x+y}{5} &= a \\ \frac{x-y}{5} &= b \\ z &= -y-x \end{cases} \\
&\iff x+y+z=0.
\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que $F=G$.

4. Il y a là aussi plusieurs méthodes. On peut d'une part démontrer que les deux systèmes

$$\begin{cases} x+y+z+t &= 0 \\ x-y+2z-2t &= 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 5x+y+7z-t &= 0 \\ x-3y+3z-5t &= 0 \end{cases}$$

sont équivalents. C'est ce qu'on obtient ici si on remarque que le deuxième système s'obtient en faisant $3L_1+2L_2$ dans la première ligne et $-L_1+2L_2$ dans la seconde. On peut aussi chercher un système générateur de F et de G et se ramener aux cas précédents. En réalité, le système générateur le plus simple à obtenir dans les deux cas est le système $u_1=(-3,1,2,0)$ et $u_2=(1,-3,0,2)$ et comme les deux sous-espaces ont le même système générateur, ils sont égaux !

Correction de l'exercice 19 ▲

La correction de l'exercice n'utilise pas la théorie de la dimension. En l'utilisant, il serait possible de donner des réponses plus courtes à certaines questions.

1. Vrai. Appelons $w_1=(1,1,0,0)$ et $w_2=(-1,1,-4,2)$. Déjà, nous pouvons observer que $u_3=2u_1+3u_2$, donc $\text{vect}(u_1,u_2,u_3)=\text{vect}(u_1,u_2)$. Ensuite nous avons $w_1=u_1+u_2$ et $w_2=u_1-u_2$, et de manière équivalente, $u_1=\frac{w_1+w_2}{2}$ et $u_2=\frac{w_1-w_2}{2}$, d'où la conclusion.

2. Vrai. Au point précédent nous avons déjà montré que $(1,1,0,0)=u_1+u_2$. Montrons que $(1,1,0,0)$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de u_2,u_3,u_4 :

$$(1,1,0,0)=\alpha(1,0,2,-1)+\beta(3,2,2,-1)+\gamma(0,0,1,0)$$

donne (écrit comme matrice augmentée)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

qui équivaut à

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

qui a pour solution $(\alpha,\beta,\gamma)=(-1/2,1/2,0)$.

3. Faux. Nous avons

$$\begin{aligned}
\text{vect}(u_1,u_2)+\text{vect}(u_2,u_3,u_4) &= \text{vect}(u_1,u_2,u_2,u_3,u_4) && \text{par construction} \\
&= \text{vect}(u_1,u_2,u_3,u_4) \\
&= \text{vect}(u_1,u_2,u_4) && \text{d'après le point 1.}
\end{aligned}$$

Voyons si $(1,0,0,0)$ appartient à cet espace :

$$(1,0,0,0) = \alpha(0,1,-2,1) + \beta(1,0,2,-1) + \gamma(0,0,1,0)$$

donne (écrit comme matrice augmentée)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

qui équivaut à

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

puis à

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

qui est incompatible (dernière ligne).

Correction de l'exercice 20 ▲

1. Soit $(x,y,z) \in F \cap G$. Le but est de savoir si (x,y,z) est nécessairement égal à 0. Pour cela, on remarque que (x,y,z) est solution du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z & = & 0 \\ 2x+y+3z & = & 0 \\ x-2y-z & = & 0 \end{array}\right.$$

On résout ce système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z & = & 0 \\ 2x+y+3z & = & 0 \\ x-2y-z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} x+2y+z & = & 0 & \\ -3y+z & = & 0 & L_2-2L_1 \to L_2 \\ -4y-2z & = & 0 & L_3-L_1 \to L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} x+2y+z & = & 0 & \\ -3y+z & = & 0 & \\ -10y & = & 0 & L_3+2L_2 \to L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \\ z & = & 0. \end{array}\right.$$

On a bien $(x,y,z) = (0,0,0)$ et donc F et G sont en somme directe.

2. On procède de la même façon : soit $(x,y,z) \in F \cap G$. Alors (x,y,z) est solution du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 0 \\ 2x+y+3z & = & 0 \\ x-2y-z & = & 0 \end{array}\right.$$

On résout ce système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 0 \\ 2x+y+3z & = & 0 \\ x-2y-z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} x+y+2z & = & 0 & \\ -y-z & = & 0 & L_2-2L_1 \to L_2 \\ -3y-3z & = & 0 & L_3-L_1 \to L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 0 \\ y+z & = & 0. \end{array}\right.$$

On peut alors finir la résolution de ce système, ou alors remarquer que $(1,1,-1)$ est solution du système, donc membre de $F \cap G$ qui n'est pas réduit à $\{(0,0,0)\}$. Ainsi, F et G ne sont pas en somme directe.

Correction de l'exercice 21 ▲

1. Soit $(x,y,z,t) \in F \cap G$. Alors d'une part on a

$$x+y+z+t=0$$

et d'autre part, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y,z,t) = (2a,-a,0,a)$ On introduit ceci dans l'équation précédente, et on trouve

$$2a-a+0+a=0 \iff 2a=0 \iff a=0.$$

Ainsi, $(x,y,z,t)=(0,0,0,0)$ et on a $F \cap G = \{(0,0,0,0)\}$ donc F et G sont en somme directe.

2. On a

$$\begin{aligned}(x-2a,y+a,z,t-a) \in F &\iff x-2a+y+a+z+t-a=0 \\ &\iff a=\frac{x+y+z+t}{2}.\end{aligned}$$

3. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ et posons $a=(x+y+z+t)/2$. Posons également $(x',y',z',t') = (x-2a,y+a,z,t-a)$. Alors d'après la question précédente, $(x',y',z',t') \in F$. On sait aussi que $(2a,-a,0,a) \in G$ et que

$$(x,y,z,t) = (x',y',z',t') + (2a,-a,0,a).$$

Ainsi, on a prouvé que $(x,y,z,t) \in F+G$ et donc que $F+G=E$. En utilisant le résultat de la première question, on conclut que F et G sont supplémentaires.

Correction de l'exercice 22 ▲

1. Ils ne sont pas supplémentaires, la raison profonde étant qu'il n'y a pas assez de vecteurs. Ici, on va trouver un vecteur qui n'est pas dans la somme de $\text{vect}(v_1,v_2)$ et $\text{vect}(v_3)$, c'est-à-dire un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire de v_1,v_2,v_3. Par exemple, v_4 n'est pas combinaison linéaire de v_1,v_2,v_3. En effet, s'il l'était, alors on aurait

$$v_4 = av_1+bv_2+cv_3$$

soit, en regardant coordonnées par coordonnées, le système

$$\begin{cases} a &= 0 \\ b &= 0 \\ c &= 0 \\ a &= 1 \end{cases}$$

qui n'admet pas de solutions. Bien sûr, avec la théorie de la dimension, il serait plus facile de remarquer qu'un système de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ ne peut pas être une base de $\mathbb{R}^4$.

2. Nous allons prouver que $\text{vect}(v_1,v_2)$ et $\text{vect}(v_4,v_5)$ sont en somme directe. Il y a deux choses à prouver :

$\text{vect}(v_1,v_2) \cap \text{vect}(v_4,v_5) = \{0\}$. Soit u dans l'intersection. Alors d'une part $u=av_1+bv_2$ et d'autre part $u=cv_4+dv_5$. En écrivant les vecteurs, on obtient

$$(a,0,b,a) = (0,d,0,c+d)$$

ce qui donne le système

$$\begin{cases} a &= 0 \\ d &= 0 \\ b &= 0 \\ a &= c+d \end{cases}$$

duquel on conclut sans peine que $a=b=c=d=0$. $\text{vect}(v_1,v_2)+\text{vect}(v_4,v_5) = \mathbb{R}^4$. Mais,

$$\text{vect}(v_1,v_2)+\text{vect}(v_4,v_5) = \text{vect}(v_1,v_2,v_4,v_5).$$

Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. Alors on remarque très facilement que

$$(x,y,z,t) = xv_1 + zv_2 + (t-x-y)v_4 + yv_5$$

ce qui prouve bien que $(x,y,z,t) \in \text{vect}(v_1,v_2) + \text{vect}(v_4,v_5)$.

3. $\text{vect}(v_1,v_2) \cap \text{vect}(v_4,v_5) = \{0\}$. Soit u dans l'intersection. Alors d'une part $u = av_1 + bv_2$ et d'autre part $u = cv_4 + dv_5$. En écrivant les vecteurs, on obtient

$$(a,0,b,a) = (0,d,0,c+d)$$

ce qui donne le système

$$\begin{cases} a &= 0 \\ d &= 0 \\ b &= 0 \\ a &= c+d \end{cases}$$

duquel on conclut sans peine que $a = b = c = d = 0$.

4. $\text{vect}(v_1,v_2) + \text{vect}(v_4,v_5) = \mathbb{R}^4$. Mais,

$$\text{vect}(v_1,v_2) + \text{vect}(v_4,v_5) = \text{vect}(v_1,v_2,v_4,v_5).$$

Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. Alors on remarque très facilement que

$$(x,y,z,t) = xv_1 + zv_2 + (t-x-y)v_4 + yv_5$$

ce qui prouve bien que $(x,y,z,t) \in \text{vect}(v_1,v_2) + \text{vect}(v_4,v_5)$.

5. Non ! On remarque en effet assez facilement que $v_5 = v_3 + v_4$ est dans l'intersection des deux sous-espaces vectoriels. On pourrait également conclure à l'aide de la théorie de la dimension.

6. Cette fois, la théorie de la dimension ne pourrait pas s'appliquer. Cependant, on remarque que $v_4 = v_5 - v_3$ est dans l'intersection des deux sous-espaces vectoriels.

Correction de l'exercice 23 ▲

Soit $f \in F \cap G$ et prenons $x \in \mathbb{R}$. Alors $f(x+n) = f(x)$ puisque f est $1-$périodique. Mais d'autre part, $f(x+n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini puisque f est élément de G. Ainsi, $f(x) = 0$ et puisque c'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f = 0$. D'autre part, considérons la fonction $f(x) = x$. Alors si $f \in F + G$, f s'écrit $f = g + h$ avec g périodique de période 1 et h qui tend vers 0 en $+\infty$. Mais alors,

$$f(n) = g(n) + h(n) = g(0) + h(n) \to g(0) \in \mathbb{R}$$

alors que $f(n) \to +\infty$. On obtient une contradiction et donc $F + G \neq E$. F et G ne sont pas supplémentaires.

Correction de l'exercice 24 ▲

D'abord, il est clair que $F \cap G = \{0\}$. En effet, si la suite (u_n) est dans l'intersection de F et G, alors tous ses termes d'indice pair sont nul, et par suite tous ceux d'indice impair sont également nuls car $(u_n) \in G$. Prouvons maintenant que $F + G = E$. Pour cela, prenons une suite (u_n) de E et réfléchissons un peu. Si $u_n = v_n + w_n$ avec $(v_n) \in F$ et $(w_n) \in G$, alors on a forcément $u_{2n} = w_{2n}$ ce qui définit forcément (w_n) puisque $w_{2n+1} = w_{2n}$. La suite (v_n) ne peut être que la différence entre (u_n) et (w_n), en espérant qu'elle soit dans F. Agissons maintenant ! On définit (w_n) par $w_{2n} = w_{2n+1} = u_{2n}$ pour tout entier naturel n. Il est clair que (w_n) est élément de G. Posons ensuite, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - w_n$. Alors par définition on a $(u_n) = (v_n) + (w_n)$ et il reste à prouver que $(v_n) \in F$. Mais c'est facile, car $v_{2n} = u_{2n} - w_{2n} = 0$. Ainsi, on a bien prouvé par ce raisonnement dit d'analyse-synthèse que $E = F \oplus G$.

Correction de l'exercice 25 ▲

Remarquons que $F = \{AQ;\ Q \in \mathbb{R}[X]\}$, ce qui permet facilement de prouver que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. D'autre part, prenons maintenant $B \in \mathbb{R}[X]$. D'après la division euclidienne, il s'écrit de

façon unique sous la forme $B = AQ + R$, où $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R \in \mathbb{R}_{d-1}[X]$, où d est le degré de A, c'est-à-dire de façon unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de $\mathbb{R}_{d-1}[X]$. Ceci signifie exactement que F et $\mathbb{R}_{d-1}[X]$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

Correction de l'exercice 26 ▲

Prouvons d'abord que F' et G sont en somme directe, c'est-à-dire que $F' \cap G = \{0\}$. Prenons $x \in G \cap F'$. Alors, puisque $F \cap G$ et F' sont en somme directe, et que $x \in F \cap G$ (x est dans G et dans $F' \subset F$), on en déduit $x = 0$. D'autre part, il faut montrer que $F' + G = E$. Soit $z \in E$. On sait que $z = f + g$, avec $f \in F$ et $g \in G$ (car $F + G = E$). D'autre part, on peut décomposer f en $g' + f'$, avec $g' \in F \cap G$ et $f' \in F'$. Ainsi, on obtient

$$z = g' + f' + g = f' + (g + g')$$

avec $f' \in F'$ et $g + g' \in G$: $F' + G = E$ ce qui achève la preuve que F' et G sont supplémentaires.

Correction de l'exercice 27 ▲

Remarquons d'abord que $F \cap G = \{0\}$. En effet, si f est élément de $F \cap G$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a à la fois $f(-x) = f(x)$ et $f(-x) = -f(x)$, d'où $f(x) = -f(x)$ ce qui entraîne $f(x) = 0$. D'autre part, tout élément h de E se décompose sous la forme $h = f + g$, avec f dans F et g dans G. Pour cela, on utilise un raisonnement par analyse-synthèse. Admettons un bref instant que $h = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $h(x) = f(x) + g(x)$ et $h(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x)$. Des deux équations précédentes, on tire facilement que $f(x) = \big(h(x) + h(-x)\big)/2$ et $g(x) = \big(h(x) - h(-x)\big)/2$. On peut désormais passer à la synthèse (le paragraphe précédent peut être considéré comme une recherche "au brouillon"). On pose $f(x) = \big(h(x) + h(-x)\big)/2$ et $g(x) = \big(h(x) - h(-x)\big)/2$. Alors on vérifie facilement que :

$h = f + g$; f est paire : en effet $f(-x) = \big(h(-x) + h(-(-x))\big)/2 = \big(h(x) + h(-x)\big)/2 = f(x)$; g est impaire (même raisonnement).

Ainsi, on a bien $F + G = E$. Remarquons que la partie 'analyse' du raisonnement montre aussi l'unicité de la décomposition, et redémontre donc que la somme est directe.

Correction de l'exercice 28 ▲

On commence par fixer G un supplémentaire de F. Soit x un vecteur qui n'est ni dans F, ni dans G (par exemple, si $x_1 \neq 0 \in F$ et $x_2 \neq 0 \in G$, alors $x_1 + x_2$ n'est ni dans F - sinon x_2 serait dans F, ni dans G - sinon x_1 serait dans G). Posons $F' = F \oplus \text{vect}(x)$ et considérons G' un supplémentaire de F' dans E. Alors, $G_1 = \text{vect}(x) \oplus G'$ est un supplémentaire de F dans E. En effet

si $z \in E$, alors il s'écrit sous la forme $z = y_1 + y_2$, avec $y_1 \in F'$ et $y_2 \in G'$. De plus, y_1 s'écrit sous la forme $\lambda x + u$, avec $u \in F$. Finalement, $z = u + (\lambda x + y_2)$, avec $u \in F$ et $\lambda x + y_2 \in G_1$. si $z \in F \cap G_1$, alors $z = \lambda x + u$ avec $u \in G'$ et donc $u = z - \lambda x \in G' \cap F'$. Puisque F' et G' sont en somme directe, on a $u = 0$. On en déduit que $z - \lambda x = 0$ soit, puisque $x \notin F$, $z = 0$ et $\lambda = 0$. Finalement, on a prouvé que $F \cap G_1 = \{0\}$.

Bien sûr, $G_1 \neq G$ puisque $x \in G_1 \setminus G$.

Correction de l'exercice 29 ▲

1. On remarque d'abord que $F \cap G_a = \{0\}$ (une fonction constante qui s'annule en un point est forcément identiquement nulle). Ensuite, prenons $h \in E$, on doit prouver que h se décompose sous la forme $h = g + C$, où C est une constante et $g(a) = 0$. Admettons que ce soit le cas. Alors, nécessairement, $h(a) = C$ et $g(x) = h(x) - C = h(x) - h(a)$. On pose donc $C = h(a)$ et $g(x) = h(x) - h(a)$. Clairement, $h = g + C$ et $g(a) = 0$ ce qui prouve que $g \in G_a$.

2. On va prouver que G et $\mathbb{R}_N[X]$ sont supplémentaires. Pour cela, il suffit de prouver que toute fonction $h \in E$ se décompose uniquement sous la forme $h = g + P$, avec $g \in G$ et $P \in \mathbb{R}_N[X]$. Unicité. Si $h = g + P$, alors, pour tout $i \in \{0, \dots, N\}$, on a $P(a_i) = h(a_i)$. Or, par la théorie des polynômes interpolateurs de Lagrange (par exemple), on sait qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_N[X]$ qui vérifie cette propriété. D'où l'unicité de P et par suite celle de g puisque $g = h - P$. Existence. Considérons P l'unique polynôme de $\mathbb{R}_N[X]$ tel que $P(a_i) = h(a_i)$ pour tout $i \in \{0, \dots, N\}$ (un tel polynôme existe). De plus, on pose $g = h - P$. Alors $g(a_i) = P(a_i) - h(a_i) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, N$ et donc $g \in G$, et bien sûr $h = g + P$.